RRC I ROK FIZYKI I ASTRONOMII
LISTA 4

**1.** Ciąg zadany indukcyjnie $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$ dla $n \in \mathbf{N}$, zwany jest ciągiem Fibonacciego. Wykaż, że

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

**2.** Wykaż, że dla określenia monotoniczności ciągu wystarczy porównać tylko sąsiednie wyrazy. Np. ciąg $(a_n)$ jest rosnący, jeżeli dla każdego $n \in \mathbf{N}$ zachodzi $a_n < a_{n+1}$.
**3.** Udowodnij z definicji, że

$$\text{a)} \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{n^2+1} = 1 \qquad \text{b)} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{dla} \quad p > 0$$

$$\text{c)} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n!)}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \text{d)} \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

**4.** Wykaż z definicji, że ciąg geometryczny $(q^n)$ jest zbieżny do zera, gdy $q \in (-1, 1)$, a dla $q > 1$ jest rozbieżny do nieskończoności.
**5.** Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

**6.** Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |g|$$

Podaj przykład pokazujący, że ciąg $(|a_n|)$ może być zbieżny, a ciąg $(a_n)$ rozbieżny.
**7.** Wykaż, że jeżeli $a_n \to 0$ i ciąg $(b_n)$ jest ograniczony, to

$$\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$$

**8.** Wykaż, że ciąg o wyrazie ogólnym

$$\text{a)}\ a_n = (-1)^{1+2+\ldots+n} \frac{n}{n+1} \qquad \text{b)}^*\ a_n = \sin(n)$$

jest rozbieżny.
**9.** Wykaż, że jeżeli pewien podciąg ciągu Cauchy'ego $(a_n)$ ma granicę $g$, to

ciąg $(a_n)$ również ma granicę $g$.

**10.** Niech $k \in \mathbf{R}$ i $k > 0$. Zbadaj zbieżność ciągu $(a_n)$ dla $a_n = (n+1)^k - n^k$.

**11.** Zbadaj czy następujące ciągi zadane indukcyjnie są zbieżne. Jeśli tak, to wyznacz ich granicę.

a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$.

b) $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$, $c > 0$.

**12.** Oblicz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\text{a) } a_n = \frac{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + ... + b_1 n + b_0}{c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_1 n + c_0} \quad c_k \neq 0$$

$$\text{b) } a_n = \frac{(2n+1)! - (2n-1)!}{(2n)!n} \qquad \text{c) } \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$$

$$\text{d) } a_n = \frac{1^2 + 2^2 + ... + n^2}{n^3} \qquad \text{e) } a_n = \frac{4^{n-2} + 2^{n+1} - 3}{2^{2n+1} - 2^n + 1}$$

$$\text{f) } a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \qquad \text{g) } a_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}$$

$$\text{h) } a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$$

$$\text{i) } a_n = (1 - \frac{1}{n})^n \qquad \text{j) } a_n = (1 - \frac{1}{n^2})^n \qquad \text{k) } a_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}\,)$$

**13.** Wyznacz granicę ciągu o wyrazie ogólnym:

$$\text{a) } a_n = \frac{n^k}{2^n},\ k \in \mathbf{N} \qquad \text{b) } a_n = \frac{c^n}{n!},\ c \in \mathbf{R} \qquad \text{c) } a_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

$$\text{d) } a_n = n^{1/n} \qquad \text{e) } a_n = (1^n + 2^n + ... + k^n)^{1/n},\ k \in \mathbf{N}$$

**14.** Niech $(a_n)$ będzie niemalejącym ciągiem o wyrazach dodatnich zbieżnym do liczby $g$. Wykaż, że

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + ... + a_n^n} = g$$

**15.** Niech $x \in \mathbf{Q}$ i $0 < x < 1$. Wyznacz zbiór punktów skupienia ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = nx - [nx]$.

**16*** Wykaż, że zbiór punktów skupienia ciągu $(a_n)$ o wyrazie ogólnym $a_n = \cos(n)$ to odcinek $[-1, 1]$.

Robert Olkiewicz